Théorème de Riesz :

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer le théorème de Riesz qui est une caractérisation de la dimension finie grâce à la compacité de la boule unité.

Dans tout ce développement, on considère $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Théorème 1 : [Deschamps, p.301]
Si E est de dimension finie, alors les parties compactes de E sont exactement ses parties fermées bornées.

Preuve :
$*$ Soit A une partie fermée et bornée de $(E, \|\cdot\|)$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite à valeurs dans A admet au moins une valeur d'adhérence qui appartient à A (car A est fermée).
Donc A est une partie compacte.

$*$ Réciproquement, raisonnons par contraposée :
- Si A n'est pas une partie fermée de $(E, \|\cdot\|)$, alors on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge mais dont la limite n'appartient pas à A. Or, l'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente étant sa limite, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de valeur d'adhérence dans A et ainsi A n'est pas compacte.

- Si A n'est pas bornée, alors :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in A \text{ tq } \|a\| > M$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément $a_n \in A$ tel que $\|a_n\| \geq n$. On construit ainsi une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|a_n\| \geq n$$

Une telle suite ne peut admettre de sous-suite convergente. En effet, si $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|a_{\varphi(n)}\right\| \geq \varphi(n) \geq n$$

La sous-suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée, elle est donc divergente et ainsi n'admet aucune valeur d'adhérence et donc A n'est pas compact.
Finalement, on a montré par contraposée que si A est compact, alors elle est fermée et bornée.

On a ainsi démontrée l'équivalence voulue.

■

Remarque 2 : [Deschamps, p.292]
Le résultat est faux en dimension infinie !
En effet, dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$, on peut considérer la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est incluse dans la boule unité fermée mais qui est 1-écartée, donc ne peut pas admettre de sous-suite convergente.
Cependant, l'espace précédent est de dimension infinie mais non complet... Il est possible qu'il y ait une réciproque dans le cas des espaces de Hilbert car ceux-ci possèdent de très bonnes propriétés qui "copient" celles sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, mais il n'en est rien... En effet, si l'on considère l'espace de Hilbert $(\ell^2_{\mathbb{N}}, \|\cdot\|_2)$ et la base canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors on a $\|e_n - e_p\|_2 = \sqrt{2}$ et donc la boule unité de cet espace n'est pas complète pour les même raisons que précédemment.

On remarque donc qu'il semble y avoir un lien profond entre la dimension finie et la caractérisation des compacts : c'est ce que nous allons essayer de mettre en lumière dans la fin du développement.

Lemme 3 : Lemme de Riesz [Hassan, p.343] :
Soit M un sous-espace vectoriel fermé strict de E.
On a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists u \in E \text{ tq } \|u\| = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Preuve :
Soit M un sous-espace vectoriel fermé strict de E.
Soit $\varepsilon > 0$.
On cherche $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$.
Prenons $v \in E \backslash M$ (existe car $M \subsetneq E$). Comme M est fermé, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(v, r) \cap M = \emptyset$ et en particulier, $d(v, M) = d \geq r > 0$.

Il existe $m_0 \in M$ tel que $d \leq \|v - m_0\| \leq \dfrac{d}{1-\varepsilon}$ par définition de d.

On a alors $u = \dfrac{1}{\|v - m_0\|}(v - m_0) \in E$ et $\|u\| = 1$.

De plus, pour tout $m \in M$, on a :

$$\begin{aligned} u - m &= \frac{1}{\|v - m_0\|}(v - m_0) - m = \frac{1}{\|v - m_0\|}\left(v - (m_0 + \|v - m_0\|\, m)\right) \\ &= \frac{1}{\|v - m_0\|}(v - m_1) \text{ où } m_1 = m_0 + \|v - m_0\|\, m \in M \end{aligned}$$

D'où :

$$\|u - m\| = \frac{\|v - m_1\|}{\|v - m_0\|} \geq d \times \frac{1-\varepsilon}{d} \geq 1 - \varepsilon$$

On a donc obtenu le résultat.

■

Théorème 4 : Théorème de Riesz [Hassan, p.343] :
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ E est de dimension finie.
$*$ La boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0,1)$ de $(E, \|\cdot\|)$ est compacte.

Preuve :
$*$ Si E est de dimension finie, alors la boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0,1)$ de $(E, \|\cdot\|)$ est compacte par le théorème précédent.

$*$ Raisonnons par contraposée :
Supposons que E est de dimension infinie.
On peut alors construire des sous-espaces vectoriels stricts E_n de E tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subsetneq E_{n+1}$.

On peut alors appliquer le lemme de Riesz avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $E = E_{n+1}$ et $M = E_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc construire $u_n \in E_{n+1} \backslash E_n$ tel que $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_n) \geq \dfrac{1}{2}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors $\dfrac{1}{2}$-écartée (en effet, pour tous entiers naturels $n \geq m$, on a $\|u_n - u_m\| \geq d(u_n, E_n) \geq \dfrac{1}{2}$), donc elle ne peut pas admettre de sous-suite convergente et ainsi $\mathcal{B}_f(0,1)$ n'est pas compacte.

Finalement, on a donc démontré le théorème de Riesz.

■

II Remarques sur le développement

Le théorème de Riesz est donc une caractérisation de la dimension finie par la compacité de la boule unité. Ce théorème permet également de constater à nouveau que les fermés bornés ne sont compacts en général qu'en dimension finie. En effet, on peut s'en convaincre avec un autre exemple : dans $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, on peut considérer la base canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et voir qu'elle est également incluse dans la boule unité fermée mais qui est 1-écartée, donc ne peut pas admettre de sous-suite convergente.

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé dans le premier théorème le théorème de Bolzano-Weierstrass :

Théorème 5 : Théorème de Bolzano-Weierstrass [Deschamps, p.301]
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence (c'est-à-dire qu'elle admet au moins une sous-suite convergente).

Ce résultat est propre à la dimension finie car repose sur l'utilisation des suites coordonnées et donc de bases.

II.2 Recasages

Recasages : 148 - 203 - 206 - 208.

III Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.